Quelques compléments relativistes.

La présente note est destinée à compléter les notes suivantes :

Relativités ...

Minkovski versus Einstein

Elle suppose une certaine maîtrise de l'algèbre géométrique et tous cas de l'algèbre vectorielle tout court , car il s'agit de se promener dans espace partiellement affine et partiellement métrique (je vais encore me faire assassiner par les matheux ...).

On trouvera les graphiques en fin de note.

Première démonstration.

Je suppose que lecteur est déjà familiarisé avec le paramétrage hyperbolique de la relativité. Je considère deux repères pseudo-orthonormés $R(e_0,\, e_1)$ et $R(f_0,\, f_1)$ et un repère propre associé à une fusée se dirigeant vers un point éloigné $R(g_0,\, g_1)$. u, v, w sont respectivement les vitesses d'éloignement de R' part rapport à R, de R" part rapport à R, et de R" part rapport à R'. On a :

$$(1)\; g_0 = e^{i\psi} e_0 = (\mathrm{ch}\psi + i\,\mathrm{sh}\psi) e_0 = \mathrm{ch}\psi\, e_0 + \mathrm{sh}\psi\, e_1$$

$$(2)\; g_0 = e^{i\theta} f_0 = (\mathrm{ch}\theta + i\,\mathrm{sh}\theta) f_0 = \mathrm{ch}\theta\, f_0 + \mathrm{sh}\theta\, f_1$$

$$(3)\; f_0 = e^{i\varphi} e_0 = (\mathrm{ch}\varphi + i\,\mathrm{sh}\varphi) e_0 = \mathrm{ch}\varphi\, e_0 + \mathrm{sh}\varphi\, e_1$$

Précisons que i est le bivecteur commun :

$$(4)\; i = e_1 e_0 = e_1 \wedge e_0 = f_1 f_0 = f_1 \wedge f_0 = g_1 g_0 = g_1 \wedge g_0$$

On tire immédiatement de (1), (2), (3) :

$$(5)\; \varphi + \theta = \psi$$

D'autre part on a :

$$(6)\;\; e_0.g_0 = \mathrm{ch}\psi \qquad e_0.f_0 = \mathrm{ch}\varphi \qquad f_0.g_0 = \mathrm{ch}\theta$$

On considère les vecteurs $t\,e_0$ et τf_0 qui sont les projections orthogonales du vecteur νg_0 . Donc :

$$(7)\;\; (t\,e_0 - \nu g_0).e_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad (\tau f_0 - \nu g_0).f_0 = 0$$

$$(8)\; \nu = t/\mathrm{ch}\psi = \tau/\mathrm{ch}\theta$$

On a donc à fois démontré la forme simplifiée de la relation de Lorentz , et le fait que le temps propre est indépendant du repère de projection. C'est donc une propriété intrinsèque de la métrique de Minkowski.

Evidemment c'est le vecteur νg_0 que l'on utilise en chronogéometrie, et les horloges insensibles aux déplacements sont représentées par les vecteurs unitaires e_0 , f_0 , g_0 .

Deuxième démonstration.

A la fin de la note *Relativités ...* je disais que la proximité spatiale était illusoire , dans le cas de la comparaison ferrovaire. Cette déclaration était plutôt sommaire !

En effet dans la présentation Minkowskienne on n'est pas du tout étonné de voir le temps s'échanger contre de l'espace. C'est presque une sensation physique. Tandis d'avec le super-TGV on « voit » côte à côte deux temps différents ! La tentation est grande d'imputer celà à un retard « effectif » de la montre qui voyage !

Tout le monde a déjà fait l'expérience d'un TGV ordinaire traversant à pleine vitesse une gare déserte. On ne voit pas grand'chose ! Nous allons essayer de mettre ça en équations !

L'axe f_0 représente le train en route vers la destination C en passant par B , dont la gare est A. A l'intant t un photon est émis de A vers C. Pour les besoins du calcul nous supposerons que ce photon (fantôme ...) se promène à une vitesse très légèrement inférieure à c . Ceci permet d'avoir un vecteur g_0 non-infini , et un temps Δ non-nul !

En avant pour l'algèbre géométrique. Nous posons :

$f_0 = \exp^{i\varphi} e_0 = \exp^{e_1 e_0 \varphi} e_0 = (\mathrm{ch}\varphi + i\,\mathrm{sh}\varphi) e_0 = \mathrm{ch}\varphi\, e_0 + \mathrm{sh}\varphi\, e_1$

$g_0 = \exp^{i\theta} e_0 \qquad g_0 \Rightarrow \infty \qquad \theta \Rightarrow \infty \qquad \Delta \Rightarrow 0$

$\mathrm{OA} = e_0\, t \qquad \mathrm{OB} = f_0\, \tau = \tau (\mathrm{ch}\varphi + i\,\mathrm{sh}\varphi) e_0$

$(t e_0 - \tau f_0).e_0 = 0 \qquad \tau = t / \mathrm{ch}\varphi$

$t e_0 + g_0\, \Delta = \tau' f_0$

$t + \Delta(\mathrm{ch}\theta + i\,\mathrm{sh}\theta) = \tau'(\mathrm{ch}\varphi + i\,\mathrm{sh}\varphi)$

$t + \Delta \mathrm{ch}\theta = \tau' \mathrm{ch}\varphi \qquad \Delta \mathrm{sh}\theta = \tau' \mathrm{sh}\varphi$

$\Delta = \frac{\mathrm{sh}\varphi}{\mathrm{sh}\theta}\, \tau' \qquad t = -\mathrm{sh}\varphi \frac{\mathrm{ch}\theta}{\mathrm{sh}\theta}\, \tau' + \mathrm{ch}\varphi\, \tau' \qquad \frac{\mathrm{ch}\theta}{\mathrm{sh}\theta} \Rightarrow 1$

$\Delta \Rightarrow 0 \qquad t \Rightarrow t = (-\mathrm{sh}\varphi + \mathrm{ch}\varphi)\, \tau'$

Et finalement :

$\tau' = t / (\mathrm{ch}\varphi - \mathrm{sh}\varphi) > \tau$

Donc le signal horaire émis par une gare quelconque est reçu à une énorme distance.

On peut faire un calcul analogue pour un signal émis par le train. Je ne contente de donner le resultat.

$t'' = \tau\, (\mathrm{ch}\varphi - \mathrm{sh}\varphi)$

Georges Ringeisen

septembre 2019

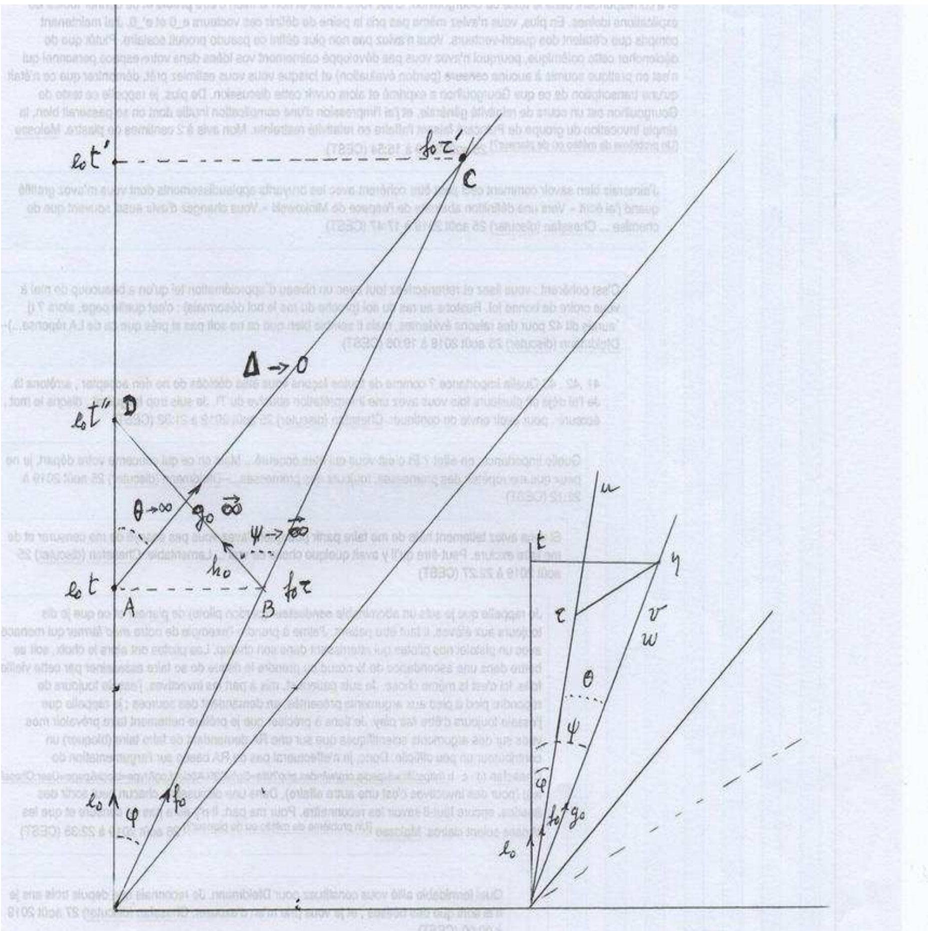

Figure 1.